

ESCENARIOS DE APRENDIZAJE Y EL USO SISTEMÁTICO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN AMBIENTES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

LEARNING SCENARIOS AND THE SYSTEMATIC USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN PROBLEM SOLVING ENVIRONMENTS

Isaid Reyes-Martinez
Cinvestav-IPN
ireyes@cinvestav.mx

Daniel Aurelio Aguilar-Magallón
Cinvestav-IPN
aguilar.m@cinvestav.mx

Existing technologies pose challenges for the education system related to what contents, strategies and skills students should learn and what types of teaching scenarios should be considered in learning. In this study, prospective high school teachers were encouraged to systematic use various digital technologies in a problem solving course during one semester. Results indicate that the participants developed and implemented a set of strategies and ways of thinking that complement and extend the approaches based on the use of pencil and paper. In addition, the use of technology allowed the participants extend mathematical discussion beyond formal settings.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Tecnología, Maestros en Formación

Introducción

En los últimos diez años, el rápido desarrollo y disponibilidad de tecnologías digitales han cambiado sustancialmente la manera de interactuar de los individuos, las formas de comunicarse, obtener información y de realizar varias actividades cotidianas. Por ejemplo, con un dispositivo móvil (tableta o teléfono inteligente) es posible consultar información en línea, leer un periódico o, por medio de una aplicación, contratar los servicios de un taxi, reservar una habitación de hotel o conocer la ruta más eficiente para viajar de un lugar a otro. Las tecnologías existentes plantean retos para el sistema educativo relacionados con los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender y sobre qué tipos de escenarios de enseñanza se deben considerar en el aprendizaje. En este estudio interesa analizar y documentar los elementos de un escenario de aprendizaje donde los participantes utilizan diversas tecnologías digitales en un ambiente de resolución de problemas que promueve la interacción entre pares, el trabajo colaborativo y la extensión y solución de los problemas matemáticos planteados.

Para guiar este estudio se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué formas de razonamiento construyen y exhiben un grupo de profesores de Bachillerato en formación cuando utilizan diversas herramientas (GeoGebra, Google Classroom, Padlet) en un ambiente de resolución de problemas? En particular, existe interés por documentar en qué medida el uso de herramientas para compartir información en línea (Padlet) puede ayudar a los estudiantes a modificar sus acercamientos iniciales de solución y desarrollar nuevas formas de explorar y extender los problemas a partir de trabajarlos con el Sistema de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra.

Marco conceptual

El estudio se sustenta y estructura a partir de tres áreas o dominios relacionados: (i) la idea de problematizar el aprendizaje de las matemáticas como principio básico en la resolución de problemas, (ii) el uso sistemático y coordinado de diversas tecnologías digitales en los procesos de representación y exploración de los conceptos matemáticos, y (iii) el diseño de las tareas como vehículos para organizar y promover el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.

La resolución de problemas y la actividad de interrogar o cuestionar

Un principio básico en una perspectiva de resolución de problemas es que los estudiantes desarrollen un enfoque inquisitivo para desarrollar y utilizar los conocimientos matemáticos. En este proceso, el aprendizaje de las matemáticas se concibe como una actividad de búsqueda de sentido en la que los estudiantes constantemente formulan y responden preguntas como una manera de representar, explorar, comprender y resolver situaciones matemáticas. Este principio es consistente con lo que Hiebert, et al. (1996) refiere como permitir que los estudiantes problematiquen los temas o contenidos como una manera de profundizar y reflexionar sobre los conceptos matemáticos, esto significa “permitir que los estudiantes se pregunten porqué las cosas suceden, para indagar, para buscar soluciones, y para resolver las incongruencias” (p. 12), los autores utilizan el término problematizar en el sentido de que a los estudiantes se les debe permitir y alentar a problematizar lo que estudian, para definir los problemas que provocan sus curiosidades y habilidades para crear sentido. Por su parte Postman y Weingartner (1969), argumentan:

El conocimiento se produce en respuesta a preguntas. [...] Una vez que ha aprendido cómo preguntar -preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas- el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer (p. 23).

El uso coordinado de herramientas digitales en la resolución de problemas matemáticos

Santos (2007) reconoce la importancia de que los estudiantes problematiquen el estudio de la disciplina. Es decir, resulta esencial que los estudiantes formulen preguntas cuando se encuentran resolviendo problemas o intentan comprender ideas matemáticas, que utilicen distintas representaciones, busquen conjjeturas y relaciones y donde el uso de distintas herramientas digitales les ayude a explorar y sustentar sus argumentos con acercamientos que pueden ir desde aspectos empíricos hasta acercamientos formales. El uso coordinado de varias herramientas digitales ofrece a los estudiantes diversas maneras de identificar, formular, representar, explorar y resolver problemas desde varias perspectivas (Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2016). El amplio desarrollo de tecnologías digitales implica decidir cuáles y cómo utilizarlas en los ambientes de aprendizaje con el objetivo de que los estudiantes comprendan conceptos matemáticos y resuelvan problemas. Santos (2007) sostiene que el uso sistemático de herramientas digitales en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no sólo influye en la manera de presentar y explorar con las ideas matemáticas sino también en las formas de razonar, sustentar y presentar relaciones o propiedades matemáticas. También, Santos-Trigo y Ortega-Moreno (2013) documentan que las tecnologías digitales no solo extienden las representaciones y estrategias que aparecen en acercamientos basados en el uso de lápiz y el papel sino que generan nuevas formas de razonamiento para desarrollar conocimiento matemático.

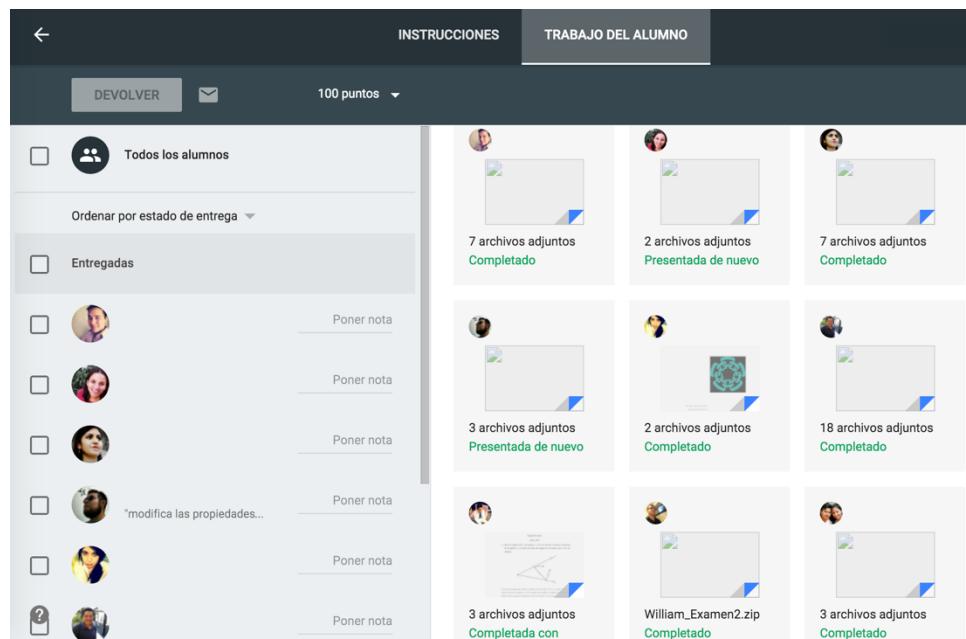
Así, el uso de varias herramientas digitales ofrece diferentes oportunidades para que los estudiantes formulen y discutan preguntas que puedan guiarlos hacia la representación y exploración de las tareas matemáticas desde perspectivas distintas y complementarias pero también ofrecen a los profesores nuevas formas de organizar el trabajo en la clase, para gestionar las tareas y materiales con mayor eficiencia, para mantenerse en constante comunicación con sus estudiantes y para crear ambientes que permitan extender la discusión de los problemas más allá del aula. En esta perspectiva, los problemas y el ambiente que se genere al resolverlos son aspectos cruciales para guiar y promover el desarrollo del conocimiento matemático y el aprendizaje de los estudiantes.

La importancia de las tareas matemáticas

En el marco de la resolución de problemas, las tareas o problemas representan un punto de partida y una oportunidad para que los alumnos busquen diferentes representaciones y formas de

resolverlas y ampliarlas, son un ingrediente fundamental para que los profesores guíen, fomenten y analicen los procesos que realizan los estudiantes en la construcción o desarrollo de un pensamiento matemático. Hiebert y Wearne (1993) afirman que “lo que los estudiantes aprenden se define en gran medida por las tareas que se les dan” (p. 395). Para Mason y Johnston-Wilder (2006), el objetivo de las tareas es hacer que los estudiantes participen de manera activa en la creación de sentido y en el desarrollo de sus habilidades matemáticas. Por lo tanto, las tareas son el vehículo para que los estudiantes comprendan los conceptos y desarrollen formas de pensamiento consistentes con el quehacer de la disciplina.

Se argumenta que el uso coordinado de diversas herramientas digitales ofrece a los estudiantes la oportunidad de ampliar las formas de razonar y trabajar los problemas y brindan la posibilidad de organizar, identificar y acceder a cierta información relevante en línea en todas las etapas de la resolución de problemas.



The screenshot shows the 'TRABAJO DEL ALUMNO' (Student Work) tab in Google Classroom. At the top, there are buttons for 'INSTRUCCIONES' (Instructions), 'TRABAJO DEL ALUMNO' (Student Work), 'DEVOLVER' (Return), and an envelope icon. A '100 puntos' (100 points) dropdown is also visible. The main area displays student submissions in a grid format. Each submission includes a student profile picture, the number of attachments, and the status (Completed, Presentada de nuevo, or Pendiente). On the left, a sidebar shows a list of students with checkboxes and 'Poner nota' (Leave a note) buttons.

Estado de entrega	Nombre del estudiante	Archivos adjuntos	Estado
Todos los alumnos			
Entregadas			
	Alumno 1	7 archivos adjuntos	Completo
	Alumno 2	2 archivos adjuntos	Presentada de nuevo
	Alumno 3	7 archivos adjuntos	Completo
	Alumno 4	3 archivos adjuntos	Presentada de nuevo
	Alumno 5	2 archivos adjuntos	Completo
	Alumno 6	18 archivos adjuntos	Completo
	Alumno 7	3 archivos adjuntos	Completo
	Alumno 8	William_Examen2.zip	Completo
	Alumno 9	3 archivos adjuntos	Completo

Figura 1. La plataforma se utilizó para enviar notificaciones a los estudiantes, compartir materiales y retroalimentar las tareas.

Participantes, problemas y procedimientos

En este trabajo se describen los elementos de un entorno de aprendizaje que busca extender las interacciones que ocurren en una aula tradicional de matemáticas. En este nuevo escenario se busca que los participantes usen de forma sistemática y coordinada un conjunto de tecnologías digitales en la resolución de problemas matemáticos. Tecnologías como: un SGD (GeoGebra) para explorar y representar los problemas de forma dinámica, una plataforma para administrar los contenidos y gestionar las tareas (Google Classroom, Figura 1), un muro digital (Padlet) para compartir ideas y nuevos acercamientos de solución y hacerlos accesibles durante el proceso de resolver problemas, servicios de Internet (Wikipedia, WolframAlpha, YouTube, KhanAcademy) para acceder, seleccionar y discriminar información relevante durante todas las etapas de resolución de problemas, una tableta (iPad) como principal medio de comunicación y acceso a información y contenidos interactivos (iBooks) y un servicio de mensajería instantánea (Google Hangouts) para comunicar y compartir información de forma eficiente con sus compañeros así como participar en una comunidad de aprendizaje en donde se discutan y comparten ideas y estrategias que les permitan resolver las tareas matemáticas.

Para esta investigación participaron nueve profesores en formación inscritos en un curso de un semestre de resolución de problemas que formaba parte de un programa de maestría en educación matemática. Todos los participantes tenían un grado universitario en el área de matemáticas y se encontraban cursando el segundo semestre del programa. El curso incluía dos sesiones de tres horas cada una durante un semestre. En el desarrollo de las actividades se intentó que los participantes desarrollaran una actitud inquisitiva, la cual consiste, fundamentalmente, en el hábito de formular y discutir constantemente preguntas acerca de una situación y que siempre se buscaran diferentes formas de explorar y resolver los problemas con el uso sistemático de un conjunto de herramientas digitales.

En este contexto los problemas representaron un punto de partida para que los estudiantes se involucraran en una reflexión matemática que se extendiera más allá del aula y que les permitiera, inicialmente, resolver el problema y posteriormente buscar otras relaciones o resultados. En este sentido, el uso de herramientas digitales ofrece a los estudiantes oportunidades de participar en situaciones que los involucren en la formulación de conjeturas, la exploración de relaciones matemáticas, la creación de nuevos problemas, la extensión y generalización de las condiciones iniciales (Autores, 2015). Para este reporte, nos enfocamos en la discusión de un problema implementado a la mitad del semestre.

El problema. Dada una circunferencia c y un segmento a , construir un rombo de lado a de tal manera que la circunferencia c quede inscrita en ese rombo.

Este problema se planteó a los profesores como parte de una evaluación que consistió en tres etapas. En la primera etapa los estudiantes trabajaron de forma individual durante tres horas, durante este periodo utilizaron diferentes herramientas digitales para explorar el problema. Todos los participantes utilizaron GeoGebra para construir sus modelos dinámicos, esto resultó crucial para representar y explorar los objetos matemáticos involucrados en la construcción del rombo. Otra de las herramientas que fue utilizada por todos los participantes fue Wikipedia, mediante esta enciclopedia en línea pudieron consultar información (como definiciones, teoremas, propiedades y formulas: <https://es.wikipedia.org/wiki/Rombo>) que contribuyó a que los participantes comprendieran y le dieran sentido a la tarea. En la segunda etapa de la actividad se pidió a los estudiantes que compartieran en Padlet las ideas que utilizaron en sus exploraciones individuales, esto con el objetivo de crear un repositorio de ideas que pudieran ser utilizadas posteriormente por los demás participantes para explorar el problema. Por último, se pidió a los estudiantes que exploraran el problema a partir de las ideas compartidas por sus compañeros en el muro, con esa información los participantes se volvieron a enganchar en la exploración del problema, esta actividad la realizaron durante una semana.

Primera etapa. Trabajo individual. Al término de la sesión de trabajo individual, se reportaron 14 soluciones diferentes, que incluyen acercamientos empíricos, algebraicos, trigonométricos y geométricos. En esta sección se muestra el acercamiento más representativo que surgió durante esta sesión.

Cinco participantes construyeron el mismo modelo dinámico trabajando de forma independiente, para ello utilizaron la heurística de *relajar las condiciones iniciales del problema*, de esta manera construyeron un rombo cuyos lados tuvieran longitud a y luego hicieron que los lados fueran tangentes a la circunferencia c . Ubicaron el punto E sobre el eje y y trazaron una circunferencia de radio a que interseca al eje x en los puntos F y G, después reflejaron E respecto a A para encontrar el punto E', de esta manera se consigue una representación parcial de a solución (Figura), el rombo de vértices EFE'G tiene los 4 lados congruentes (de longitud igual al segmento a), al mover el punto E es posible visualizar una posición en la que la circunferencia c esté inscrita al rombo EFE'G, para que eso ocurra los lados del rombo deben ser tangentes a la circunferencia c . ¿Cómo se logra esta construcción?

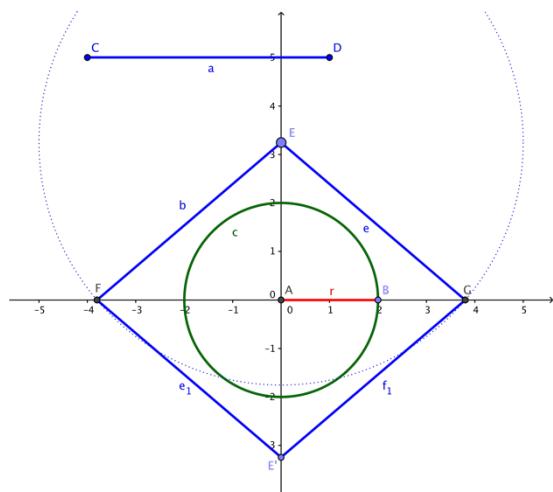


Figura 2. El rombo EGE'F es una representación parcial.

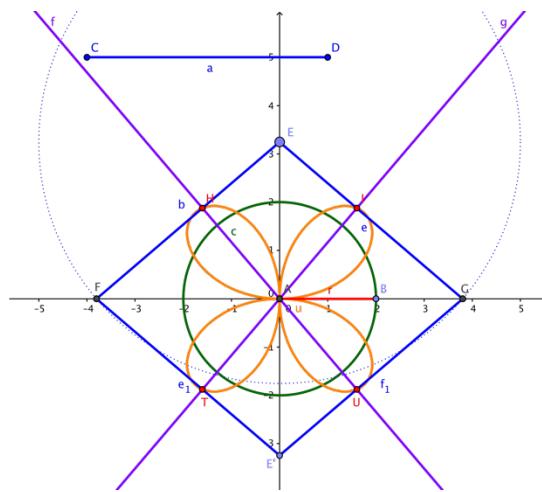


Figura 3. En naranja se muestra el lugar geométrico de los puntos H, T, I y U.

Al trazar rectas perpendiculares a los segmentos e y b por el punto A, éstas se intersecan con los lados del rombo se obtienen los puntos H, T, I y U (Figura 3). El lugar geométrico que describen los cuatro puntos cuando se mueve el punto E sobre el eje y se muestra en color naranja. Las intersecciones del lugar geométrico y la circunferencia c marcan las posiciones en las que los segmentos del rombo serán tangentes a la circunferencia c . Debido a la simetría del rombo y la circunferencia, este problema se puede simplificar y explorar solo en uno de los cuatro cuadrantes. Si centramos la atención en el primer cuadrante, se puede observar que el lugar geométrico que describe I interseca a la circunferencia c en dos posiciones, marcando así las dos soluciones del problema (Figura 4 y Figura 5).

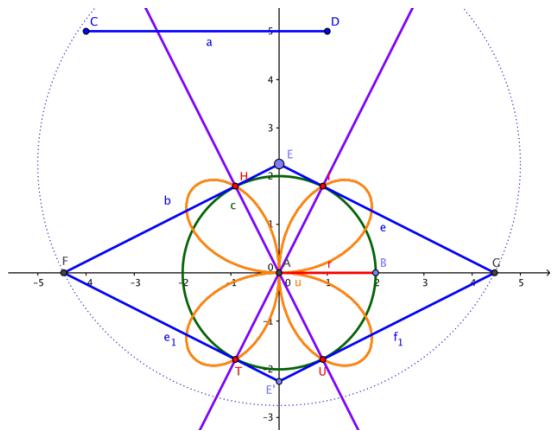


Figura 4. Primera solución.

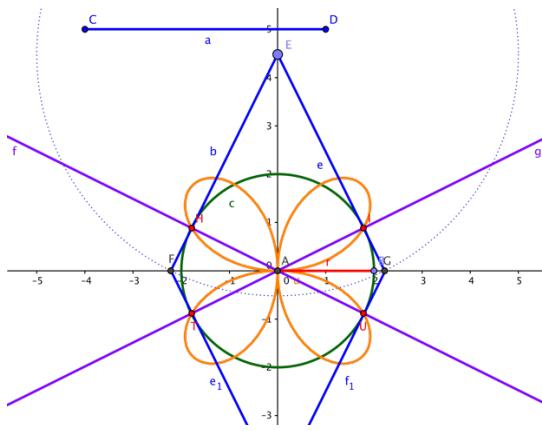


Figura 5. Segunda solución.

Segunda etapa. Ideas compartidas en Padlet. Después de trabajar de forma individual en la construcción del rombo, se pidió a los participantes que compartieran en Padlet las ideas medulares de sus exploraciones individuales. Se hizo hincapié en que no compartieran las soluciones sino las ideas que los llevaron a construir los modelos dinámicos. En la Figura 6 se muestra una parte del muro digital en el que se compartieron las ideas que se utilizaron para resolver el problema del rombo.

Circunferencia inscrita en rombo
Dada una circunferencia c y un segmento a, construir un rombo de lado a y circunferencia inscrita c.

Ánalisis numérico-funcional: Daniel
Saludos compañeros.
Algo que no han explotado mucho en sus acercamientos es la utilidad de implementar análisis numérico-funcionales a partir de los atributos de los elementos dentro de la configuración dinámica. Les comparto un archivo de GeoGebra 3.2 para que analicen algunos lugares geométricos que surgen a partir de este tipo de análisis. La circunferencia azul y el segmento rojo son los elementos dados.

Otro enfoque. Isaid
La siguiente figura puede ayudar a que piensen el problema desde un punto de vista diferente. El segmento AB es el lado del rombo, T es un punto móvil en el segmento AB por el cual se traza la perpendicular b. C es un punto móvil y define el centro de la circunferencia inscrita con radio CT.

Exploración algebraica. Isaid
Les comparto la siguiente imagen que encontré en la wiki a partir de la cual pueden plantear una solución algebraica.

Heira Exploración 3
Examinar los angulos formados por las tangentes de la circunferencia que pasan por la intersección de las diagonales.
Y ya!

Segunda idea: por Julio S
La segunda idea es observar lo que pasa con los lugares geométricos, es decir cuando el punto H (movible) coincide con el punto O.

Figura 6. Muro que contiene todas las aportaciones hechas para el problema del rombo.

En total se compartieron 25 ideas en el muro (<http://es.padlet.com/isaid/rombo>). Se pidió a los participantes que seleccionaran algunas de las ideas de sus compañeros y que volvieran a explorar el problema a partir de esas ideas.

Tercera etapa. Exploraciones a partir de las ideas compartidas en el muro. Tres de los 9 participantes no lograron construir un modelo dinámico, fue hasta que tuvieron acceso a las ideas de sus compañeros que lograron resolver el problema. A continuación se muestra una solución que parte de una idea que se compartió en el muro. La Figura 7 hace referencia a una propiedad importante de los rombos: *La altura del rombo es igual al diámetro de la circunferencia inscrita*. Esta idea fue recuperada por una de las participantes que no había conseguido resolver el problema durante la primera etapa. En la Figura 8 se obtienen de forma algebraica los vértices y el centro del rombo a partir de construir un triángulo rectángulo de altura $2r$, base x e hipotenusa a . La participante utilizó deslizadores para variar los valores de r y a , esto le permitió definir el valor mínimo de a como $2r$, de esta manera siempre es posible construir el rombo.

Karen

Dado un segmento a y una circunferencia de radio r, se traza un rombo con lados a. El centro de la circunferencia se encuentra en las intersecciones de las diagonales, a partir de esa idea se traza una circunferencia con radio r y centro en la intersección de las diagonales. La altura del rombo corresponde al diámetro de la circunferencia

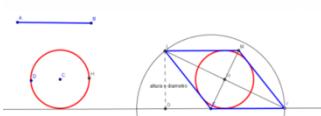


Figura 7. Idea compartida por Karen.

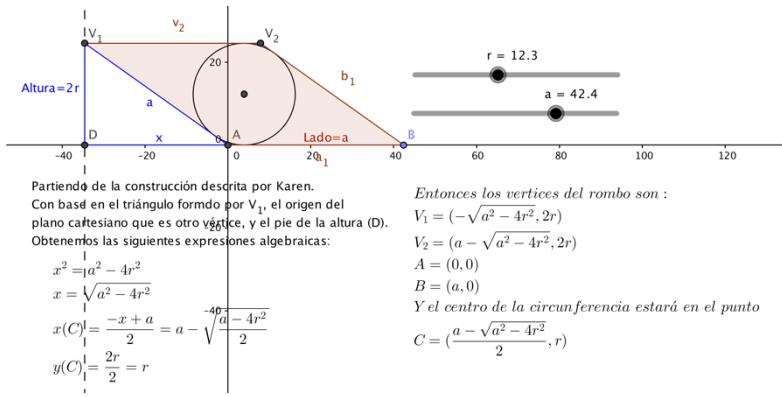


Figura 8. Solución algebraica a partir de considerar la idea compartida por Karen.

Todos los participantes mostraron una marcada participación respecto al número de soluciones que reportaron después de la exploración de las ideas del muro, en especial los que no habían podido resolver el problema por si solos. Resalta el caso de una participante que durante la primera etapa (trabajo individual) presentó 4 exploraciones en las que no pudo obtener una solución, tras explorar el problema a partir de las ideas del muro presenta quince exploraciones que incluyen dos soluciones que no surgieron durante la primera etapa.

Comentarios. Durante esta actividad se resalta el caso de una participante que durante la sesión de trabajo individual no logró resolver el problema, después de realizar 4 intentos, pero después de tener acceso al muro consigue presentar 15 exploraciones exitosas que incluyen dos soluciones que no se presentaron durante la sesión de trabajo individual. En este sentido, el muro digital le permitió a la participante recuperarse de intentos no exitosos y retomar ideas del muro que la llevaron a presentar varias soluciones al problema.

Conclusiones

Durante este reporte se ha argumentado que el uso de un SGD (GeoGebra) por parte de los profesores en formación puede depender de las *affordances* de la herramienta para construir y explorar los modelos dinámicos de las tareas matemáticas. Esta exploración los llevó a observar invariantes, patrones y relaciones entre los elementos de los modelos. Del mismo modo, el uso de las tecnologías de comunicación permiten que los participantes extiendan y continúen con las discusiones matemáticas más allá del salón de clases. De esta manera las discusiones pueden ocurrir prácticamente en cualquier lugar, sin limitaciones de tiempo y espacio.

Con el uso de las tecnologías digitales es posible reestructurar y extender los ambientes tradicionales de los salones de clase, promoviendo que los estudiantes continúen trabajando, explorando, interactuando y reflexionando de forma continua virtualmente desde cualquier sitio sin limitaciones de tiempo y espacio. Para ello es importante que los estudiantes desarrollen formas de pensar y trabajar en esos ambientes que les permite el desarrollo de habilidades para utilizar de manera coordinada un conjunto de herramientas digitales.

De esta manera, el uso coordinado de diversas herramientas digitales fue esencial para que los participantes lograran identificar y apoyar las relaciones matemáticas y para crear un ambiente de aprendizaje que favoreciera y promoviera las interacciones de los participantes dentro y fuera del aula. En este contexto, el uso de Google Classroom permitió a los participantes acceder a los materiales del curso desde cualquier lugar y recibir retroalimentación de otros participantes. El uso de GeoGebra fue importante para la construcción de los modelos dinámicos que les ayudaron a identificar y examinar relaciones matemáticas. El uso de Internet les dio la oportunidad de obtener información en línea que les permitió aclarar o ampliar información sobre los conceptos involucrados en las tareas. Del mismo modo. El uso de Mathematica les ayudó a realizar cálculo matemáticos complejos y de esta forma concentrarse en el significado de los resultados. Compartir sus ideas en Padlet y utilizar Hangouts favoreció la interacción con los demás, ya que fue importante para buscar diferentes maneras de cómo resolver las tareas matemáticas. El uso de Padlet resultó transcendental durante esta actividad ya que impactó en todas las fases de la resolución de un problema (Polya, 1973) al permitirles:

1. Tener claridad acerca de lo que trataba el problema (Fase de comprensión del problema).
2. Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad (Fase de diseño de un plan).
3. Monitorear el proceso de solución y decidir cuando abandonar algún camino que no estuviera produciendo resultados (Fase de implementación).
4. Revisar el proceso de solución y evaluar la respuesta obtenida (visión retrospectiva).

Existing technologies pose challenges for the educational systems related to what contents, strategies and skills students should learn and what types of teaching scenarios should be considered in learning. In this study, prospective high school teachers were encouraged to systematic use various digital technologies in a problem solving course during one semester. Results indicate that the

participants developed and implemented a set of strategies and ways of thinking that complement and extend the approaches based on the use of pencil and paper. In addition, the use of technology allowed the participants extend mathematical discussion beyond formal settings.

Keywords: Problem Solving, Technology, Teacher Education-Preservice

Introduction

In the last ten years, the rapid developments and availability of digital technologies are substantially changing ways in which individuals interact, communicate, access and get information to perform daily activities. For example, with a mobile device (tablet or smartphone) you can look for online information, read a newspaper or, through an application, request the services of a taxi, book a hotel room or make the most efficient route for going from one place to another. This study aims at analyzing and documenting the extent to which the use of digital technologies helps prospective high school teachers represent and explore mathematical tasks and to foster pairs' interaction, collaborative work and to extend mathematical discussions beyond formal settings.

To guide this study, the following research question was posed: What forms of reasoning do prospective high school teachers construct as a result of using different digital tools (GeoGebra, Google Classroom, Padlet) in a problem-solving environment? In particular, there is interest in documenting the extent to which the use of tools in sharing information online (Padlet) can help students to change their initial problem solving approaches and to develop new ways to explore and extend initial tasks by working on them with the Dynamic Geometry System (DGS) GeoGebra.

Conceptual framework

The study is based and structured around three areas or related domains: (i) the idea of problematize the learning of mathematics as a basic principle to learn mathematics and develop problem solving competencies (ii) the systematic and coordinated use of various digital technologies in the processes of representing and exploring of mathematical concepts, and (iii) the design of the tasks as vehicles to organize and promote the development of students' mathematical knowledge.

Problem solving and the problematizing activity

A basic principle in a problem-solving perspective is that students develop an inquisitive approach to develop and use mathematical knowledge. In this process, learning mathematics is conceived as a search for meaning activity in which students constantly ask and answer questions as a way to represent, explore, understand and solve mathematical situations (Santos-Trigo, 2014). This principle is consistent with what Hiebert et al. (1996) refers to as allowing students to problematize topics or content as a way to deepen and reflect on mathematical concepts, this means "allow students to ask why things happen, to investigate, to find solutions, and to resolve the incongruities" (p. 12), the authors use the term problematize in the sense that students should be allowed and encouraged to problematize what they study to define the problems that cause their curiosity and skills to create sense. Postman and Weingartner (1969), argue:

Knowledge is produced in response to questions. [...] Once you've learned how to ask- relevant questions, appropriate and with substance- the student has learned how to learn and nobody can stop them to continue learning what they need and wants to know (p. 23).

The coordinated use of digital tools in solving mathematical problems

Santos (2007) recognizes the importance for students to problematize the study of discipline. That is, it is essential for students to ask questions when they are solving problems or try to understand mathematical ideas using different representations, to look for conjectures and relationships and where the use of different digital tools help them explore and support their

arguments with approaches that can go from empirical reasoning to formal approaches. The coordinated use of various digital tools offers students different ways to identify, formulate, represent, explore and solve problems from various perspectives (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2016). The extensive development of digital technologies involves deciding what and how to use them in learning environments with the objective that students understand mathematical concepts and solve problems. Santos (2007) argues that the systematic use of digital tools in the construction of students' mathematical knowledge not only influences the way to present and explore mathematical ideas but also the ways of reasoning, supporting and presenting relationships or mathematical properties. Also, Santos-Trigo and Ortega-Moreno (2013) pointed out that digital technologies not only extend the representations and strategies that appear in approaches based in the use pencil and paper but also generate new ways of thinking to develop mathematical knowledge.

Thus, the use of various digital tools offers different opportunities for students to develop and discuss questions that can lead them to represent and explore mathematical tasks from different and complementary perspectives, and also offer teachers new ways of organizing and managing the class work and class materials more efficiently. Similarly, teachers can keep constant communication with their students and create environments to extend the discussion of problems beyond the classroom. In this perspective, the problems and the teaching atmosphere are crucial aspects to guide and promote the development of mathematical knowledge and student learning.

The importance of mathematics tasks

In the context of problem solving, tasks or problems represent a starting point and an opportunity for students to find different representations and ways to solve and extend them. Mathematical tasks are essential tools for teachers to guide, promote and analyze their students' processes to construct, develop, and use mathematical knowledge. Hiebert and Wearne (1993) state that "what students learn is defined largely by the tasks they are given" (p. 395). For Mason and Johnston-Wilder (2006), the objective of the tasks is to make students participate actively in the creation of meaning and develop their mathematics skills. Therefore, the tasks are the vehicle for students to understand concepts and develop ways of thinking that are consistent with mathematical practices.

We argue that the coordinated use of various digital tools offers students an opportunity to expand the ways of thinking involved in solving problems and to organize, identify and access some relevant online information at all problem solving phases

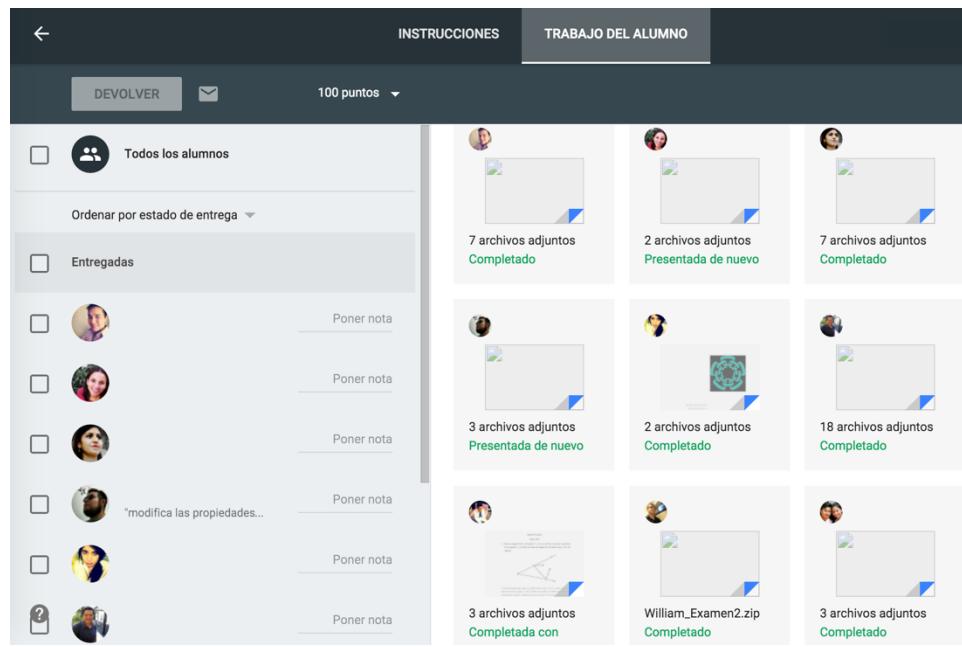


Figure 1. The platform that was used to send notifications to students, share materials and to provide feedback to students.

Participants, problems and procedures

In this paper we describe aspects of a learning environment that seeks to expand the interactions that take place in a traditional mathematics classroom. In this new environment the goal is that participants use in a systematic way a collection of digital technologies when solving mathematical problems. These digital technologies included: A DGS (GeoGebra) to explore and represent problems dynamically, a platform for managing content and manage tasks (Google Classroom, Figure 1), a digital wall (Padlet) to share ideas and new approaches to solve the tasks that were available during the problem solving process, Internet services (Wikipedia, Wolfram Alpha, YouTube, Khan Academy) to access, select and discriminate relevant information during all stages of problem solving, a tablet (iPad) as a primary means of communicating and accessing information and interactive content (iBooks) and instant messaging (Google Hangouts) to communicate and share information efficiently with their peers and participate in a learning community where they discuss and share ideas and strategies to solve mathematical tasks.

This study involved nine prospective high school teachers who were taking a semester long problem solving course that was part of a master's program in mathematics education. All participants had a bachelor's degree with a mathematics major and were enrolled in the second semester of the program. The course included two sessions of three hours each. During the development of sessions, all participants were encouraged to engage and develop an enquiring approach, which consists mainly in the habit of formulating and constantly discuss questions about a situation and different ways to explore and solve problems with the systematic use of a set of digital tools.

In general terms, all tasks or problems that were given to the participants represented a starting point for them to engage in mathematical thinking that could extend beyond the classroom and that would allow them to first solve the problem and then look for other connections and solutions. In this sense, the use of digital tools offers the participants an opportunity to share their ideas or conjectures, the exploration of mathematical relationships, the creation of new problems, the extension and generalization of initial conditions (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Ortega-Moreno, 2015). For this report, we focus on the discussion of a problem implemented in the middle of the semester.

The problem. Given a circle c and a segment a , construct a rhombus with side a such that the circle c remains inscribed in the rhombus.

This problem was posed as part of the participants' assessment and consisted of three stages. In the first stage students worked individually for three hours, using different digital tools to explore the problem. All participants used GeoGebra to construct a dynamic model of the task. This model became a key source for the participants to identify, represent, and explore mathematical objects involved in the construction of the rhombus. Another tool that was used by all participants was the encyclopedia Wikipedia in which they looked for information (such as definitions, theorems, properties and formulas: <https://es.wikipedia.org/wiki/Rombo>) that helped them understand and give meaning to the task. In the second stage, the students were asked to share in the Padlet board the ideas they used in their individual explorations. That is, they created a repository of ideas which later could be used by other participants to explore the problem. Finally, the participants were asked to explore the problem using their colleagues' ideas; with that information, participants were again engaged in the exploration of the problem; this activity was conducted for a week.

First stage. Individual work. At the end of the individual work session, 14 different solutions, including empirical, algebraic, trigonometric and geometric approaches were reported. In this section the most representative approaches that emerged during this session are presented.

Five participants proposed the same dynamic model working independently, to this end they relied on the heuristic to *relax the initial conditions of the problem*, so they drew a rhombus whose sides have length a and then they made the sides tangent to the circumference c . They placed the point E on the y axis and drew a circle of radius a that intersects the x axis at points F and G, then reflected E with respect to A to find the point E', so a partial representation of the solution is achieved (Figure 2); the rhombus with vertices EFE'G has 4 congruent sides (of length equal to segment a); if you move the point E it is possible to find a position where the circumference c is inside rhombus EFE'G, for this to occur the sides of the rhombus should be tangent to the circle c . How is this construction achieved?

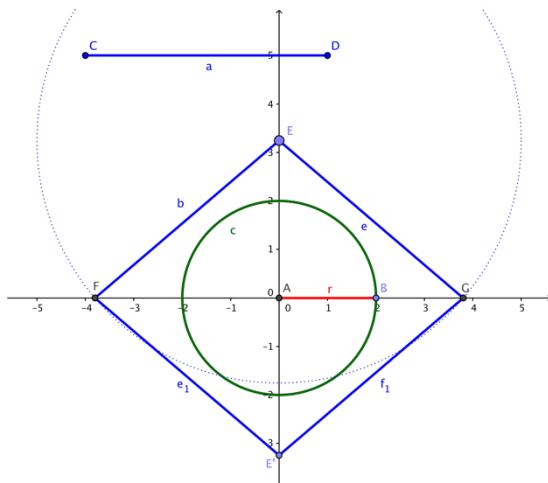


Figure 2. The rhombus EGE'F is a partial representation.

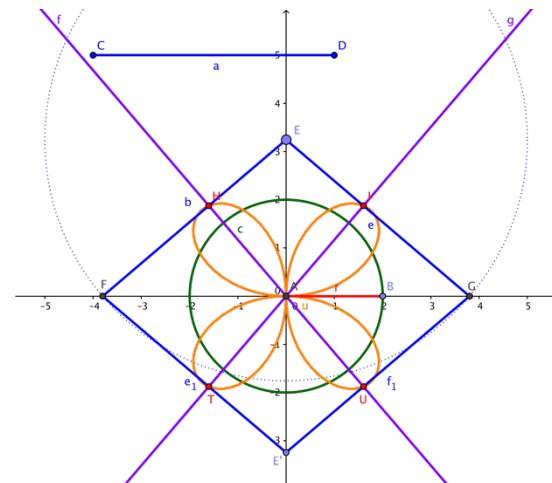


Figure 3. The geometric locus of the points H, T, I and U is shown in orange.

When drawing perpendicular lines to the segments e and b through point A , these perpendicular lines intersect the sides of the rhombus at the points H, T, I and U (Figure 3). The locus of the four points when point E moves on the y axis is displayed in orange. The intersections of the loci and the circumference c identify the positions in which the segments of the rhombus will be tangent to the

circumference c . Due to the symmetry of the rhombus and the circumference, this problem can be simplified and explored by only looking at one of the four quadrants. If we focus on the first quadrant, we can see that the locus described by I intersects the circumference c in two positions, showing the two solutions of the problem (Figure 4 and Figure 5).

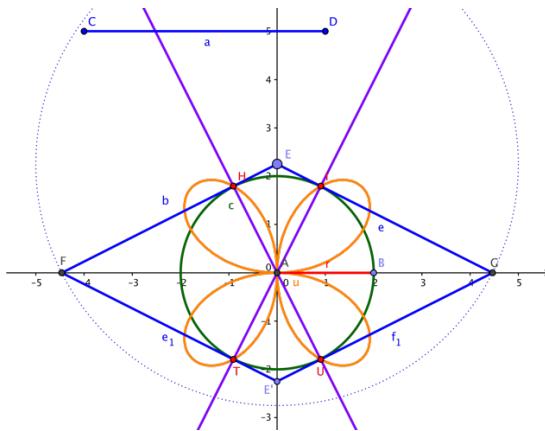


Figure 4. First solution.

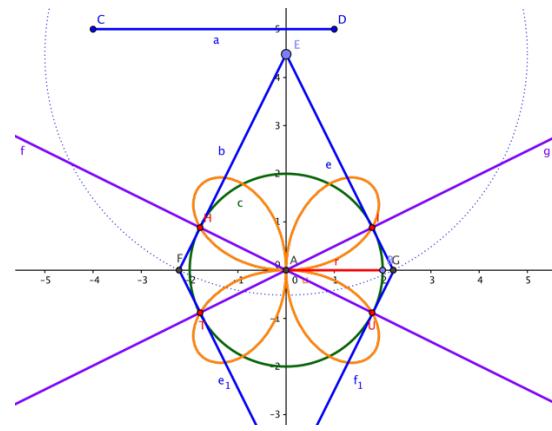


Figure 5. Second solution.

Second stage. Padlet shared ideas. After working individually in the construction of the rhombus, participants were asked to share via Padlet the core ideas of their individual approaches. It was emphasized that they should not share the solutions, but the ideas that led them to build the dynamic models. Figure 6 shows part of the digital wall where the participants shared the ideas that later were used to solve the problem.

Circunferencia inscrita en rombo
Dada una circunferencia c y un segmento a , construir un rombo de lado a y circunferencia inscrita c .

Análisis numérico-funcional: Daniel
Saludos compañeros.
Algo que no han explotado mucho en sus acercamientos es la utilidad de implementar análisis numérico-funcionales a partir de los atributos de los elementos dentro de la configuración dinámica. Les comparto un archivo de GeoGebra 3.2 para que analicen algunos lugares geométricos que surgen a partir de este tipo de análisis. La circunferencia azul y el segmento rojo son los elementos dados.

[DATOS ADJUNTOS](#)

Otro enfoque. Isaid
La siguiente figura puede ayudar a que piensen el problema desde un punto de vista diferente. El segmento AB es el lado del rombo, T es un punto móvil en el segmento AB por el cual se traza la perpendicular b. C es un punto móvil y define el centro de la circunferencia inscrita con radio CT.

Exploración algebraica. Isaid
Les comarto la siguiente imagen que encontré en la wiki a partir de la cual pueden plantear una solución algebraica.

Heira Exploración 3
Examinar los angulos formados por las tangentes de la circunferencia que pasan por la intersección de las diagonales. Y ya!

Segunda idea: por Julio S
La segunda idea es observar lo que pasa con los lugares geométricos, es decir cuando el punto H (móvil) coincide con el punto O.

Figure 6. Digital wall that contains all participants' contributions made to the rhombus problem.

In total 25 contributions were shared on the wall (<http://es.padlet.com/isaid/rombo>). The participants were asked to select some of their peers' ideas and to pursue them to explore the problem again.

Third stage. Explorations that consider shared ideas from the wall. Three of the 9 participants failed to initially build a dynamic model, but they were able to construct such a model later on based on the ideas that were shared at the wall. In what follows we show a solution that emerged from one idea that was shared in the wall. Figure 7 refers to an important property of the rhombus: *The height of the rhombus is equal to the diameter of the inscribed circle*. This idea was

recovered by one of the participants who had failed to solve the problem during the first stage. Figure 8 shows an algebraic approach that involves the vertices and the center of the rhombus and a right triangle with height $2r$, base x and hypotenuse a . The participant used sliders to change the values of r and a , this allowed her to set the minimum value of a as $2r$, so it is always possible to build the rhombus.

Karen

Dado un segmento a y una circunferencia de radio r , se traza un rombo con lados a . El centro de la circunferencia se encuentra en las intersecciones de las diagonales, a partir de esa idea se traza una circunferencia con radio r y centro en la intersección de las diagonales. La altura del rombo corresponde al diámetro de la circunferencia

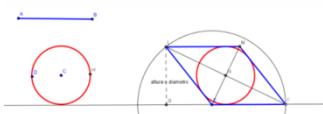


Figure 7. Idea shared by Karen.

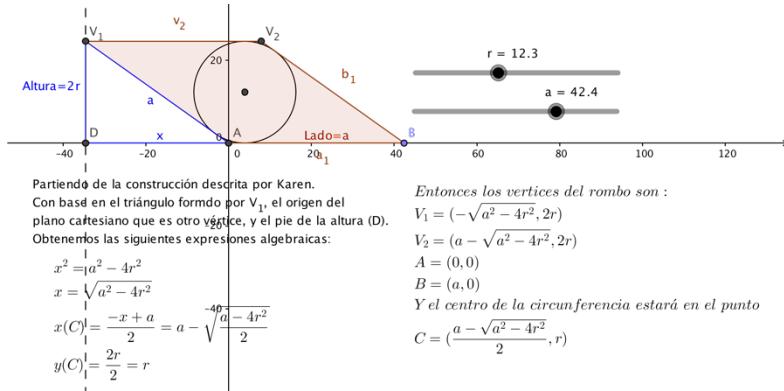


Figure 8. Algebraic solution from considering the idea shared by Karen.

All participants showed a marked participation regarding the number of solutions that were reported after exploring the ideas that were shared through the wall, especially those who had not been able to solve the problem by themselves. It is highlighted the case of a participant that during the first stage (individual work) presented four explorations in which she could not obtain a solution, after exploring the problem from the ideas of the wall, she presented fifteen explorations including two solutions that did not emerge during the first stage.

Comments. One participant experienced difficulties during the individual work time and could not solve the problem after 4 attempts; however, after having access to the wall, she was able to present 15 successful explorations that included two solutions that were not presented during the individual work session. In this sense, the digital wall allowed the participant to recover from unsuccessful attempts and take into account ideas that led her to present several solutions to the problem.

Conclusions

Throughout this report we have argued that the use of a DGS (GeoGebra) by the prospective high school teachers can depend on the tool affordances to construct and explore dynamic models of mathematical tasks. This exploration led them to observe invariances, patterns and relationships among elements of the model. Similarly, the use of communication technologies allows the participants to extend and continue mathematical discussions beyond formal settings. This task discussion can happen virtually anywhere without limitations of time and space.

With the use of digital technologies, it is possible to restructure and extend the traditional classroom environments, promoting that students keep working, exploring, interacting, and reflecting from any place without limitations of time or space. To this end, it is important that students develop forms of thinking and working in these environments so that they can develop the ability to use in a coordinated way the digital tools.

Thus the coordinated use of various digital tools was essential for the participant to identify and support mathematical relations and to create a learning environment that favored and fostered interactions among participants inside and outside the classroom. In this context, the use of Google Classroom allowed the participants to access course materials from anywhere and receive feedback

from others participants. The use of GeoGebra was important to construct dynamic models that helped them identify and examine mathematical relationships. The use of Internet gave them the opportunity to obtain online information that helped them clarify or extend what they recall from concepts involved in the tasks. Similarly, using Mathematica helped them to perform complex calculations and focus on the meaning of the results. Sharing their ideas via Padlet and using Hangouts favored the interaction with others, and accessing others' ideas was important to look for distinct task paths solution. The use of Padlet was essential for the participants during the process and problem solving phases during this activity (Polya, 1973) by allowing:

1. To fully understand the problem (Problem understanding phase).
2. To consider several ways to solve the problem and selecting a particular method from an assessment regarding its usefulness (Design of a plan phase).
3. To monitor the solution process and decide when to abandon a path that was not producing results (Implementation phase).
4. To review the solution process and evaluate the results (Review/extend phase).

References

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, 30(2), 393-425.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A., & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, 25(4), 12-21.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin Publications.

Polya, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Postman, N., & Weingartner, C. (1969). *Teaching as a subversive activity*. New York: DelacortePress.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2006). On the use of computational tools to promote students' mathematical thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 361-376.

Santos-Trigo, M. (2010). A mathematical problem-solving approach to identify and explore instructional routes on the use of computational tools. In J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard, & J. Hertzog (Eds.), *Technology implementation and teacher education: Reflective models* (pp. 296-313). IGI Global: Hersey PA.

Santos-Trigo, M., & Ortega-Moreno, F. (2013). Digit technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *International Journal of Learning Technology*, 8(2), 186-200.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinated use of digital technologies in learning environments. In L. Uden, J. Sinclair, Y. Tao, & D. Liberona (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud. MOOC and Big Data* (pp. 61-71). Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. In L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (Vol. 533, pp. 298-309). Springer International Publishing.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Ortega-Moreno, F. (2015). Fostering and supporting the coordinated use of digital technologies in mathematics learning. *International Journal of Learning Technology*, 10(3), 251-270.